Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 12 gennaio 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x + e^{-x^2}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è continua e derivabile ovunque.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + e^{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty.$$

Dai limiti vediamo che la funzione non è limitata e che $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$, quindi f non ha né massimo né minimo. La funzione non ha né asintoti orizzontali né vertical, vediamo gli obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{e^{-x^2}}{x} = 1 + \frac{0}{-\infty} = 1 =: m$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0 =: q$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{e^{-x^2}}{x} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1 =: m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0 =: q$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo anche per $x \to +\infty$. Cerchiamo ora massimi o minimi locali calcolando la derivata

$$f'(x) = 1 - 2xe^{-x^2}.$$

Per stabilire il segno della derivata, osserviamo prima che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = 1 - 0$$

per gerarchia di infiniti. Quindi f' è limitata e positiva in un intorno di $-\infty$ e $+\infty$. Valutiamo il minimo di f' per capire se cambia segno. Calcoliamo quindi la derivata seconda.

$$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Dato che $e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il segno dipende solo da quello di $2x^2 - 1$.

$$2x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

quindi

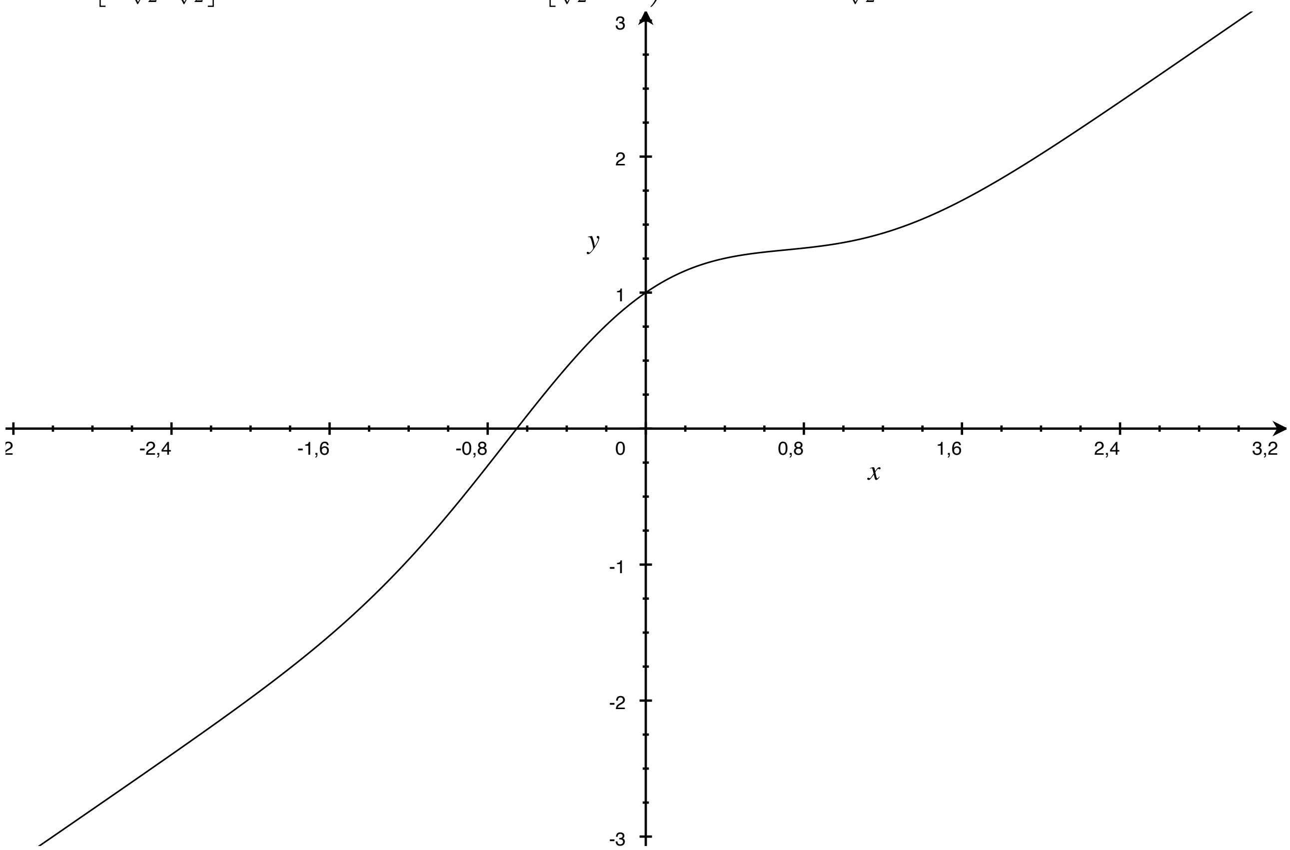
$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right), \qquad f''(x) < 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Ne segue che f' è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strettamente decrescente in $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e strettamente crescente in $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1$ risulta che $f'(x) > 1$ in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Osserviamo ora che

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} > 0$$

dato che $e > 2$. Ne segue che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi f è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$ e non ha né punti di massimo né di minimo locali.

Dallo studio della derivata seconda otteniamo anche che f è strettamente convessa in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strettamente concava in $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e strettamente convessa in $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. I punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di flesso.



Esercizio 2 Sia E l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali che

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sia divergente. Calcolare l'estremo superiore di E.

Soluzione

Poniamo $a_n = \left(\frac{n^2+\log n}{n^\alpha \log(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ e osserviamo che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. Ai fini di applicare il criterio del confronto asintotico scriviamo la successione nel seguente modo:

$$a_n = \left(\frac{n^2(1 + \frac{\log n}{n^2})}{n^\alpha \log(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{n^{\frac{\alpha}{2}} (\log(n+1))^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1} (\log(n+1))^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$, scegliamo

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1} (\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

e ricordiamo che $\sum_n b_n$ diverge se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq 1$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

dal criterio del confronto asintotico otteniamo che anche $\sum_n a_n$ diverge se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq 1$ cioè $\alpha \leq 4$. L'insieme E risulta quindi essere l'intervallo $(0, 4]$ e il suo estremo superiore è 4.

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x^2) - \sin^2(x^3)}{\log(1 + x^{10})}.$$

Soluzione